Feuille d'Exercices IX

Calcul Stochastique

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{\geqslant 0}$ la filtration brownienne standard. Soit $(M_t)_{t\geqslant 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale continue. Utiliser un argument de localisation et le théorème de représentation prouvé en cours pour montrer qu'il existe $\phi \in \mathcal{L}^2_{\text{Loc}}([0,T])$ telle que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi(\omega, s)\mathrm{d}B_s \quad \text{pour tout t} \in [0,T].$$

On note la différence avec le résultat du cours où l'on a supposé que $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$ mais ϕ était dans $\mathcal{H}^2$.

Exercice 2. Soit B un mouvement brownien standard. On considère la martingale $M_t = \mathbb{E}[B_T^3|\mathcal{F}_t]$ pour $t \leqslant T$. Montrer que l'on a la représentation

$$M_t = 3\int_0^t (T - s + B_s^2)\mathrm{d}B_s.$$

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien standard et

$$X_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{\sqrt{1+s}}$$

Utiliser un théorème de représentation pour calculer $\mathbb{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant 3} X_t \geqslant 1)$.

Exercice 4. Soit pour $\alpha > 0$,

$$X_t = \sqrt{\alpha+1}\int_0^t u^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}B_u.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(\sup_{0\leqslant s\leqslant 2} X_s \geqslant 1)$.
2. Soit $\tau = \inf\{t > 0, X_t \geqslant 1\}$. Calculer la densité de τ. Pour quelles valeurs de α τ a une espérance finie?

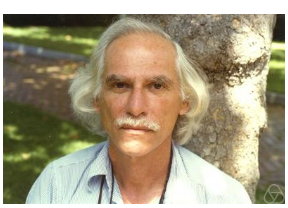
Pour l'exercice suivant on suppose connu le lemme suivant:

Lemma 1. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus indépendantes et soit $X \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{G}$ alors pour une fonction f positive et intégrable on a*

$$\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{F}] = \Psi(X) \quad \textit{avec} \quad \Psi(x) = \mathbb{E}[f(x,Y)].$$

Exercice 5. (Plus difficile) Soit B un mouvement brownien standard et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable.

1. En utilisant le lemme, montrer qu'il existe une fonction ψ telle que $\mathbb{E}[f(B_T)|\mathcal{F}_t] = \psi(B_t, t)$ et que l'on peut écrire
$$\psi(B_t, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}x$$
2. Calculer la différentielle stochastique de $Z_t = \psi(B_t, t)$. Sans calculer les dérivées, pour quelles raisons savons nous que
$$\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\psi = 0 \quad ?$$
3. En déduire que l'on peut construire un processus $\phi(\omega, s) \in \mathcal{H}^2$ tel que $f(B_T) = \mathbb{E}[f(B_T)] + \int_0^T \phi(\omega, s)\mathrm{d}B_s$.
4. Déterminer $\phi(\omega, s)$ explicitement pour $f(x) = \mathbb{1}_{x>0}$.



Lester Dubins
(1920–2010)

Gideon E. Schwarz
(1933–2007)